

## 基于虚拟纤维的各向异性超弹性材料本构模型设计

卢子璇<sup>12</sup> 何浩<sup>1</sup> 吴笛<sup>3</sup> 刘学慧<sup>12\*</sup>

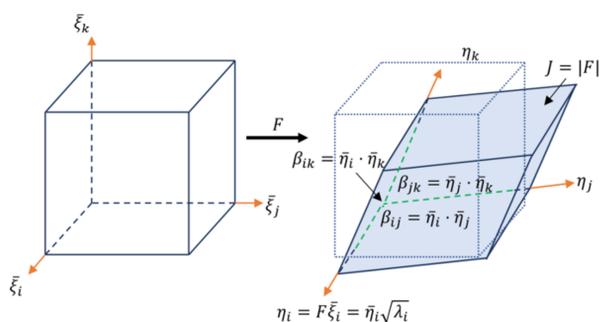
1 中国科学院软件研究所 2 中国科学院大学计算机学院 3 中国科学院力学研究所

### 摘要

有限元法 (FEM) 是图形学基于物理的动画中模拟软体与弹性体的有效方法之一. 超弹性本构模型以及非线性有限元算法可以克服使用线弹性本构模型所带来的非物理效果 (Nonphysical effect). 各向异性超弹性材料因其材料方向各向异性特性被广泛应用于布料、肌肉、植物纤维、软体组织等变形模拟. 为了拓展可使用的各向异性超弹性虚拟材料, 本文建立了一种基于虚拟纤维的各向异性超弹性材料本构模型设计方式, 详细讨论了弹性应变能量密度的定义方法, 轴向应变、剪切应变、体积应变的相应度量, 参数调节以及物理效果. 我们使用基于四面体的非线性有限元方法, 并使用半隐式时间积分进行解算. 结果表明, 这种本构模型可以模拟包括视觉刚度、泊松效应、各向异性轴向特性等材料的物理属性, 并且可以适用于包括带有大角度空间扭转的大变形模拟.

### 动机

为了扩展物理模拟中各向异性超弹性材料的种类, 我们提出了基于虚拟纤维的本构模型, 该模型使用每根纤维的轴向应变度量  $\lambda_k$ 、剪切应变度量  $\beta_{ij}$  和体积应变度量  $J$  描述应变 (见下图):

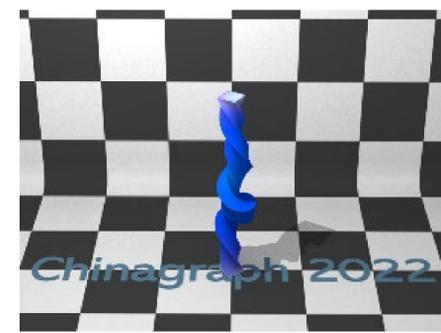


应变度量  $\lambda_k$ 、 $\beta_{ij}$  和  $J$  是变形梯度  $F$  的函数, 并且分别控制轴向能量分量、剪切能量分量和体积能量分量. 由于能量的可加性, 描述材料本构的弹性应变能量密度函数可被进一步表示为纤维加和与能量分量加和的形式:

$$\Psi = \Psi_{\text{fiber}} + \Psi_{\text{shearing}} + \Psi_{\text{volumetric}}$$

$$= \sum_{k=1}^n \omega_k (\lambda_k - 1)^2 + \sum_{k=1}^{n/3} \sum_{i \neq j} s_k (\beta_{ij})^2 + \sum_{k=1}^{n/3} \gamma_k (J - 1)^2$$

### 结果



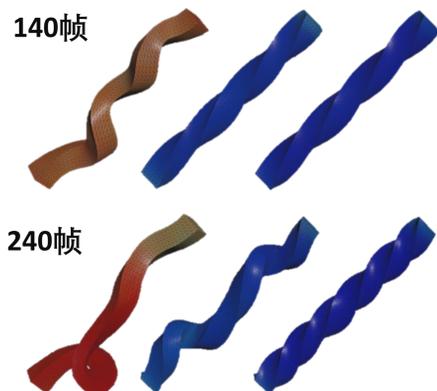
上图中, 我们测试了带有空间扭转的大变形模拟, 我们的本构模型可以正确展示空间扭转大变形状态. 右侧还展示了具有不同的剪切能量分量的材料可以在扭转的过程中展现出不同的屈曲效果.

弹性梁扭转实验能量函数

左  $5e2 \left( \sum_{k=1}^n 0.04 (\lambda_k - 1)^2 + \sum_{k=1}^{n/3} 30 \beta_{ij}^2 + \sum_{k=1}^{n/3} 0.8 (J - 1)^2 \right)$

中  $5e2 \left( \sum_{k=1}^n 0.04 (\lambda_k - 1)^2 + \sum_{k=1}^{n/3} 15 \beta_{ij}^2 + \sum_{k=1}^{n/3} 0.8 (J - 1)^2 \right)$

右  $5e2 \left( \sum_{k=1}^n 0.04 (\lambda_k - 1)^2 + \sum_{k=1}^{n/3} 5 \beta_{ij}^2 + \sum_{k=1}^{n/3} 0.8 (J - 1)^2 \right)$



### 方法

虚拟纤维本构模型轴向分量、剪切分量、体积分量的应变度量与能量形式和PK I 应力张量如下表所示, 可以证明本构满足动量守恒(静止和刚体位移变形).

分量	应变度量	能量分量形式	PK I
轴向分量	$\lambda_k =   F \bar{\xi}_k   = F^T F : \bar{\xi}_k \otimes \bar{\xi}_k$	$\Psi_{\text{fiber}} = \sum_{k=1}^n \omega_k (\lambda_k)$	$P_{\text{fiber}} = \frac{\partial \Psi_{\text{fiber}}(F)}{\partial F} = \sum_{k=1}^n \omega_k' 2 F \bar{\xi}_k \otimes \bar{\xi}_k$
剪切分量	$\beta_{ij} = \bar{\eta}_i \cdot \bar{\eta}_j = \frac{\eta_i \cdot \eta_j}{\sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_j}}$	$\Psi_{\text{shearing}} = \sum_{k=1}^{n/3} \sum_{i \neq j} s_k (\beta_{ij})$	$P_{\text{shearing}} = \frac{\partial \Psi_{\text{shearing}}(F)}{\partial F} = \sum_{k=1}^{n/3} \sum_{i \neq j} s_k' [\bar{\eta}_i \otimes \bar{\eta}_j + \bar{\eta}_j \otimes \bar{\eta}_i - \beta_{ij} (\bar{\eta}_i \otimes \bar{\eta}_i + \bar{\eta}_j \otimes \bar{\eta}_j)] F^{-T}$
体积分量	$J =  F $	$\Psi_{\text{volumetric}} = \sum_{k=1}^{n/3} \gamma_k (J)$	$P_{\text{volumetric}} = \frac{\partial \Psi_{\text{volumetric}}(F)}{\partial F} = \sum_{k=1}^{n/3} \gamma_k' J F^{-T}$

由于能量函数需要满足:  $\Psi \geq 0$  能量非负性, 静息应力稳定  $\frac{\partial \Psi}{\partial F}|_{F=I} = 0$  和  $\Psi(F)|_{F=I} = 0$  静息能量稳定, 我们给出了满足上述条件的最简能量形式:

$$\Psi = \sum_{k=1}^n (\lambda_k - 1)^2 + \sum_{k=1}^{n/3} \sum_{i \neq j} \beta_{ij}^2 + \sum_{k=1}^{n/3} (J - 1)^2$$

以及带有线性纤维权重形式:

$$\Psi = \sum_{k=1}^n w_k^2 (\lambda_k - 1)^2 + \sum_{k=1}^{n/3} \sum_{i \neq j} w_i w_j \beta_{ij}^2 + \sum_{k=1}^{n/3} w_i w_j w_j (J - 1)^2$$

### 算法

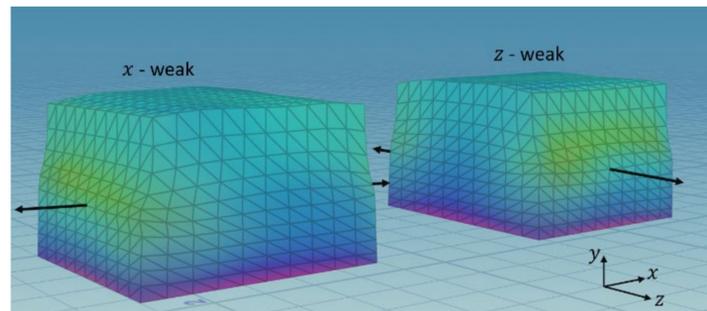
我们使用基于超弹性本构模型的非线性有限元算法 (Sifakis and Barbic 2012), 选取线性四节点四面体单元, 并使用半隐式时间积分求解位移.

### 能量函数分量

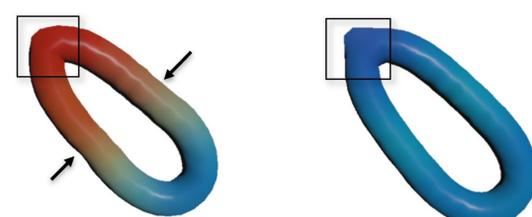
轴向分量	√	√	×	×
剪切分量	×	×	√	×
体积分量	×	√	√	√
特点	不稳定	不保角	保角, 不轴向应变	不保角, 不保轴向应变

### 纤维方向与材料的各向异性特性

块体坠落实验, 纤维主方向具有最大的弹性波模量.



### 对比 45度重力场, 橡胶圈拉伸实验



a. 虚拟纤维各向异性材料的弹性圈  $5e3 \left( \sum_{k=1}^n (\lambda_k - 1)^2 + \sum_{k=1}^{n/3} \beta_{ij}^2 + \sum_{k=1}^{n/3} (J - 1)^2 \right)$

b. 横观各向同性超弹性材料弹性圈  $5e3 (\lambda - 1)^2 + \frac{\mu}{2} (||F||_F^2 - 3) - \mu \log(J) + \frac{\lambda}{2} (\log(J))^2$

上图展示了约束顶点后橡胶圈在45度重力场中简谐运动的实验结果. 实验结果表明, 调节虚拟纤维材料能量的剪切分量与体积分量, 相比Kim et al (2019) 采用的弹性基底与加强纤维组成的横观各向同性材料, 虚拟纤维材料可以获得更加丰富的径向效果 (类似泊松效应) 与体积保持效果 (方框处).



ID: P000157